Ορισμός: Ονομάζουμε κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ ένα υποσύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ της μορφής:

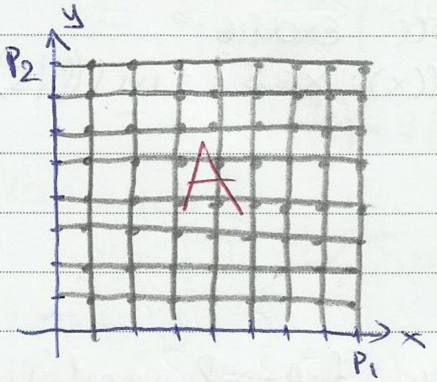
$$A=[a_1,\beta_1]\times[a_2,\beta_2]\times\dots\times[a_n,\beta_n]$$

Ορισμός: Ονομάζουμε περιεχόμενο του A και το συμβολίζουμε με $V(A)$, και ισούται με:

$$V(A)=(\beta_1-a_1)\cdot(\beta_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_n-\beta_n)=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i-a_i)$$

Ορισμός: Ονομάζουμε διαμέριση P του A, ένα σύνολο $P=P_1\times P_2\times\dots\times P_n=\{t_0^{(1)},t_1^{(1)},\dots,t_{k_1}^{(1)}\}\times\dots$
$\dots\times\{t_0^{(n)},t_1^{(n)},\dots,t_{k_n}^{(n)}\}$ όπου $\forall i=1,\dots,n$ το σύνολο $P_i=\{t_0^{(i)},\dots,t_{k_i}^{(i)}\}$ είναι μια διαμέριση του $[a_i,\beta_i]$, δηλαδή $a_i=t_0^{(i)}<t_1^{(i)}<\dots<t_{k_i}^{(i)}=\beta_i$, $i=1,\dots,n$

Σχηματικώς:



Τέλος, συμβολίζουμε τη διαμέριση με:

$$\mathcal{P}(A)=\{P\subset A : P \text{ διαμερ. του } A\}$$

Ορισμός: Η διαμέριση P του A διαμερίζει (διαιρεί) το A στα κλειστά ορθογώνια $S=[t_{j_1-1}^{(1)},t_{j_1}^{(1)}]\times\dots$
$\dots\times[t_{j_n-1}^{(n)},t_{j_n}^{(n)}]$, όπου $j_i=1,\dots,k_i$, $i=1,\dots,n$ τα οποία S ονομάζονται υποορθογώνια της P. Το σύνολο των υποορθογωνίων της συμβολίζεται με S_P.

Ορισμός: Η $P'\in\mathcal{P}(A)$ λέγεται εκλέπτυνση της $P\in\mathcal{P}(A)$ εάν $P'\supseteq P$

Ορισμός: Η $P''\in\mathcal{P}(A)$ λέγεται κοινή εκλέπτυνση των P και $P'\in\mathcal{P}(A)$ αν $P''\supset P,P'$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Για τα υποορθογώνια $S \in S_P$ μιας διαμέρισης $P \in \mathcal{P}(A)$ ισχύουν $S \subset A$, $\bigcup_{S \in S_P} S = A$ και $\sum_{S \in S_P} V(S) = V(A)$

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και P μια διαμέριση του A. Τότε, οι πραγματικοί αριθμοί

$$L(P,f) = \sum_{S \in S_P} \inf(f|S)\, V(S)$$

$$U(P,f) = \sum_{S \in S_P} \sup(f|S)\, V(S)$$

ονομάζονται κάτω και άνω αθροίσματα αντιστοίχως υπό την διαμέριση P.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $S \subseteq A$ τότε έχουμε:

$$-\infty < \inf f = \inf\{f(x) : x \in A\} \leq \inf\{f(x) : x \in S\} = \inf(f|S)$$

καθώς όμοια προκύπτει ότι:

$$\sup(f|S) \leq \sup f < \infty$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και έστω $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη $L(P,f)$ και $U(P,f)$ τα κάτω και άνω αντίστοιχα. (της f για τη διαμέριση P) Τότε

α) $\forall P \in \mathcal{P}(A)$:

$$-\infty < \inf f \cdot V(A) \leq \underbrace{L(P,f) \leq U(P,f)}_{} \leq \sup f \cdot V(A) < \infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\inf f \cdot V(A) = \inf f \sum_{S \in S_P} V(S) = \sum_{S \in S_P} \inf f\, V(S) \leq$$

$$\leq \sum_{S \in S_P} \inf(f|S)\, V(S) = L(P,f) \leq \sum_{S \in S_P} \sup(f|S)\, V(A) =$$

$$= U(P,f) \leq \sum_{S \in S_P} \sup f\, V(S) = \sup f \sum_{S \in S_P} V(S) = V(A) < +\infty$$

β) $\forall\, P, P' \in \mathcal{P}(A)$ με $P' \supseteq P$

$$\mathcal{L}(P,f) \le \mathcal{L}(P',f) \quad \& \quad U(P',f) \le U(P,f)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$P' = P_1' \times \dots \times P_n' \supseteq P_1 \times \dots \times P_n = P \Leftrightarrow P_i' \supseteq P_i,\ i=1,\dots,n$

Έστω $S \in S_P$, $\exists\, \ell_S \in \mathbb{N}$ υποορθογώνια

$T_i^{(S)} \in S_{P'},\ i=1,\dots,\ell_S$

ώστε

$$S = \bigcup_{i=1}^{\ell_S} T_i^{(S)}, \quad v(S) = \sum_{i=1}^{\ell_S} v(T_i^{(S)})$$

και

$$\inf(f|S) \le \inf(f|T_i^{(S)}) \le \sup(f|T_i^{(S)}) \le \sup(f|S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf(f|S)v(S) = \sum_{i=1}^{\ell_S} \inf(f|S)\, v(T_i^{(S)}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\ell_S} \inf(f|T_i^{(S)}) \cdot v(T_i^{(S)}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\ell_S} \sup(f|T_i^{(S)}) \cdot v(T_i^{(S)}) \le \sum_{i=1}^{\ell_S} \sup(f|S)\, v(T_i^{(S)}) =$$

$$= \sup(f|S) \cdot v(S)$$

και αφού

$$S_{P'} = \{T_i^{(S)} \in S_{P'} : i=1,\dots,\ell_S,\ S \in S_P\}$$

έχουμε

$$L(P,f) = \sum_{S \in S_P} \inf(f|S) \cdot v(S) \le \sum_{S \in S_P} \sum^{\ell_S} \inf(f|T_i^{(S)}) \cdot v(T_i^{(S)}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{T \in S_{P'}} \inf(f|T)v(T)}_{L(P',f)} \le \underbrace{\sum_{T \in S_{P'}} \sup(f|T) \cdot v(T)}_{U(P,f')} =$$

$$= \sum_{S \in S_P} \sum_{i=1}^{\ell_S} \sup(f|T_i^{(S)})\, v(T_i^{(S)}) \le \sum_{S \in S_P} \sup(f|S) \cdot v(S) =$$

$$= U(P,f)$$

γ) Έστω $P'' \in \mathcal{P}(A)$ κοινή εκλέπτυνση των P & P' τότε $\mathcal{L}(P',f) \le \mathcal{L}(P'',f) \le U(P'',f) \le U(P,f)$